A 55-a OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Al V-LEA TEST DE SELECŢIE PENTRU OBMJ, 23 mai 2004

Subiectul 1. Se consideră tabloul triunghiular

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & \dots \\
 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & \dots \\
 & & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & \dots \\
 & & & 4 & 7 & 11 & 18 & \dots \\
 & & & & 12 & 19 & 31 & \dots
\end{array}$$

definit prin condiţiile:

i) pe primele două linii, fiecare element începând cu al treilea, este suma precedentelor două;

ii) pe celelalte linii fiecare element este suma celor două numere aflate pe aceeaşi coloană, deasupra acestuia.

a) Să se arate că toate liniile satisfac prima condiţie (i);

b) Alegem 4 linii consecutive şi fie a, b, c, d primele elemente ale acestora. Să se determine d în funcţie de a, b, c.

Subiectul 2. Fie M, N, P mijloacele laturilor BC, CA şi respectiv AB, ale triunghiului ABC cu centrul de greutate G. Să se arate că dacă $2BN = \sqrt{3}AB$ şi $BMGP$ este patrulater inscriptibil, atunci ABC este un triunghi echilateral.

Subiectul 3. Fie A o mulţime de numere naturale nenule cu proprietăţile:

i) dacă $a \in A$, atunci toţi divizorii naturali ai săi aparţin lui A;

ii) dacă $a, b \in A$, $1 < a < b$, atunci $1 + ab \in A$.

Să se arate că dacă A are cel puţin 3 elemente, atunci $A = \mathbf{N}^*$.

Subiectul 4. Se consideră un poligon convex cu $n \geq 5$ laturi. Să se arate că există cel mult $\dfrac{n(2n-5)}{3}$ triunghiuri de arie 1 cu vârfurile printre vârfurile poligonului.

Timp de lucru: 4 ore